NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n^{o} 4

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3 -A	Exercice 3 -B	Soin	Tenue du groupe	BONUS
Total	4	6	6	2	1	1	2

Exercice 1
Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -5 + 5i$ **2.** $z_2 = (\sqrt{3} - 3i)^4$ **3.** $z_3 = (-i + 1)(1 + i\sqrt{3})$

Exercice 2
Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$a = 2 + 3i\sqrt{3}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{3}i, \quad c = -4 - 3i\sqrt{3}, \quad d = -2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

1. Placer les points A, B, C et D sur l'annexe (au verso).
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Démontrer que $\dfrac{d-b}{c-a}$ est un imaginaire pur.
4. En déduire la nature du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 3
On définit pour tout nombre complexe $z \neq i$ le nombre $Z = \dfrac{z+3}{z-i}$.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur, $\mathscr{F}$ celui des points $M(z)$ tels que Z est réel et enfin $\mathscr{H}$ celui des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.

Partie A :

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels et $z \neq i$.
   Déterminer la forme algébrique de Z. Montrer en particulier que :
   $$\Re(Z) = \frac{x^2 + 3x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2}$$
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. De même, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathscr{F}$.

Partie B :

1. Par des considérations d'ordre géométrique, déterminer $\mathscr{H}$.

BONUS Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix} e^{iky} = e^{\frac{i(x+ny)}{2}} \left(2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^n$.
En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$

Annexe de l'exercice 2